MODELOWANIE PROCESU PRZEPŁYWU CIEPŁA ZA POMOCĄ RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH NIECAŁKOWITEGO RZĘDU Z WYKORZYSTANIEM OPTYMALIZACJI ALGORYTMEM KUKUŁKI

Edyta Gawin, Adam Pieprzycki
e_gawin@atar.edu.pl
Akademia Tarnowska, ul. Mickiewicza 8, 33-100 Tarnów

Streszczenie

System wykorzystany w badaniach stanowi eksperymentalny obiekt cieplny typu SISO z jednym wejściem i trzema wyjściami, przedstawiony na rys. 1 (zob. [2]). Obiekt ma postać cienkiego miedzianego pręta o długości 260 mm, przy czym w analizie przyjęto jego znormalizowaną długość równą 1,0.

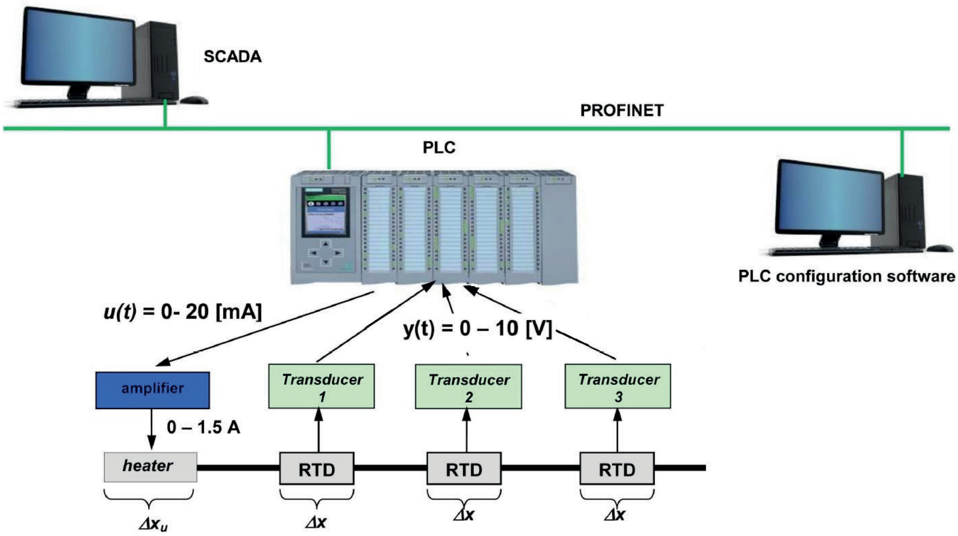
Pręt jest ogrzewany za pomocą grzałki elektrycznej o długości, zlokalizowanej na jednym z jego końców. Pomiar temperatury realizowany jest przy użyciu trzech rezystancyjnych czujników temperatury (RTD) typu Pt-100 o długości Δx = 0,14, umieszczonych w punktach odpowiadających 0,3; 0,5 oraz 0,7 długości pręta.

Sygnałem wejściowym układu jest standardowy sygnał prądowy w zakresie 0–20 mA, który następnie podlega wzmocnieniu do zakresu 0–1,5 A i zasila grzałkę. Temperatura pręta jest mierzona za pomocą czujników Pt-100, a sygnały pomiarowe są bezpośrednio odczytywane przez moduł wejść analogowych sterownika PLC. Komunikacja pomiędzy elementami systemu realizowana jest za pośrednictwem sieci PROFINET.

Proces przepływu ciepła modelowany jest przy pomocy równań różniczkowych niecałkowitego rzędu opisujących rozchodzenie się ciepła w ośrodku jednowymiarowym [1]:

$$\begin{cases} {}^{C}D_t^{\alpha} Q(x,t) = a\frac{\partial^{\beta} Q(x,t)}{\partial x^{\beta}} - R_a Q(x,t) + b(x)u(t) \\ \frac{\partial Q(0,t)}{dx} = 0, t \geq 0 \\ \frac{\partial Q(1,t)}{dx} = 0, t \geq 0 \\ Q(x,0) = 0, 0 \leq x \leq 1 \\ y(t) = y_0 \int_0^1 Q(x,t) c(x) dx \end{cases} \tag{1}$$

gdzie α, β > 0 oznaczają niecałkowity rząd systemu, *Q(x, t)* oznacza temperaturę w momencie *t* i punkcie *x*, R_a, *a* oznaczają współczynniki odpowiednio przewodzenia ciepła oraz wymiany ciepła, *b(x)* określa funkcję grzejnika, *c(x)* jest funkcją wyjścia oraz y_0 oznacza stałe wzmocnienie systemu.



Rys. 1. Konstrukcja systemu eksperymental-nego z jednym wejściem i trzema wyjściami

Fig. 1. An experimental system with one input and three outputs

Podany model możemy zapisać w postaci transmitancji niecałkowitego rzędu z opóźnieniem:

$$G_{FO1}(s) = \frac{ke^{-\tau_1 s}}{T_\alpha s^\alpha + 1}, \quad (2)$$

$$G_{FO2}(s) = \frac{ke^{-\tau_2 s}}{(T_\alpha s^\alpha + 1)(T_\beta s^\beta + 1)}. \quad (3)$$

W kolejnym etapie przeprowadzono optymalizację parametrów modelu dla analizowanego procesu cieplnego. Jako podejście referencyjne zastosowano deterministyczną metodę optymalizacji opartą na algorytmie Neldera-Meada, zaimplementowaną m.in. w funkcji *fminsearch* dostępnej w środowisku MATLAB.

W badaniach wykorzystano również jedną z metod niedeterministycznych – algorytm kukułki (Cuckoo Search, CS), należący do klasy heurystycznych metod optymalizacji inspirowanych zjawiskami obserwowanymi w naturze [3].

Wyniki przeprowadzonych eksperymentów wskazują, że optymalizacja parametrów modeli transmitancji niecałkowitego rzędu z opóźnieniem (2) oraz (3), realizowana z wykorzystaniem algorytmu kukułki, prowadzi do uzyskania dokładniejszych rezultatów w sensie przyjętej funkcji kryterialnej w porównaniu z klasyczną metodą Neldera-Meada. Potwierdza to zasadność stosowania algorytmów rojowych, które umożliwiają zwiększenie dokładności procesu optymalizacji oraz bardziej precyzyjne wyznaczenie parametrów modeli przepływu ciepła, zwłaszcza w przypadku modeli niecałkowitego rzędu.

Słowa kluczowe: proces przepływu ciepła, równania różniczkowego niecałkowitego rzędu, algorytm kukułki

Keywords: heat transfer process, non integer order differential equation, cuckoo search algorithm

Bibliografia/References

[1] Gawin, Edyta. 2023. Rozprawa doktorska: Zastosowanie rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu w modelowaniu cyfrowym procesów przewodnictwa cieplnego. Kraków: AGH.

[2] Oprzędkiewicz, Krzysztof, Mitkowski, Wojciech. 2022. „Fractional order state space models of the one-dimensional heat transfer process". Fractional dynamical systems: methods, algorithms and applications, p. 361-397.

[3] Pieprzycki, Adam. 2025. Wybrane algorytmy optymalizacji inspirowane zjawiskami przyrodniczymi. Tarnów: Akademia Tarnowska.

MODELING THE HEAT TRANSFER PROCESS WITH NON INTEGER ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS USING THE CUCKOO OPTIMIZATION ALGORITHM

Abstract

The system used in the study constitutes an experimental SISO heat plant with one input and three outputs, as shown in Fig. 1 (see [1]). The object consists of a thin copper rod 260 mm long, with its normalized length assumed to be 1.0 for analytical purposes.

The rod is heated by an electric heater of the length attached to the end of the rod. Temperature measurements are performed using three resistance temperature detectors (RTD) of the Pt-100 type, each with a length of $\Delta x = 0.14$, positioned at 0.3, 0.5, and 0.7 of the rod's length.

The input signal of the system is the standard current signal of the range of 0–20 mA, which is subsequently amplified to the range of 0–1.5 A to supply the heater. The rod's temperature is measured via the Pt-100 sensors, and the measurement signals are read directly by the analog input module of the PLC controller. Communication between the system components is carried out via a PROFINET network.

The heat transfer process is modeled using non integer order partial differential equations describing heat propagation in a one-dimensional medium [2]:

$$\begin{cases} {}^{C}D_t^{\alpha} Q(x,t) = a\frac{\partial^{\beta} Q(x,t)}{\partial x^{\beta}} - R_a Q(x,t) + b(x)u(t) \\ \frac{\partial Q(0,t)}{dx} = 0, t \geq 0 \\ \frac{\partial Q(1,t)}{dx} = 0, t \geq 0 \\ Q(x,0) = 0, 0 \leq x \leq 1 \\ y(t) = y_0 \int_0^1 Q(x,t)c(x)dx \end{cases} \tag{1}$$

where α, β > 0 denote non integer orders of the system, *Q(x, t)* denotes the temperature at time *t* and point *x*, R_a, *a* denote coefficients of heat conduction and heat exchange, *b(x)* defines the control function, *c(x)* is the output function, and y_0 denotes the system's gain constant.

We can write the given model in the form of a non-integral-order transfer function with delay:

$$G_{FO1}(s) = \frac{ke^{-\tau_1 s}}{T_\alpha s^\alpha + 1}, \tag{2}$$

$$G_{FO2}(s) = \frac{ke^{-\tau_2 s}}{(T_\alpha s^\alpha + 1)(T_\beta s^\beta + 1)}. \tag{3}$$

In the next stage, the model parameters for the analyzed heat transfer process were optimized. As a reference approach, a deterministic optimization method based on the Nelder-Mead algorithm was employed, implemented, among others, in the *fminsearch* function available in the MATLAB environment.

The study also utilized a non-deterministic method – the Cuckoo Search (CS) algorithm – which belongs to the class of nature-inspired heuristic optimization techniques [3].

The results of the experiments indicate that the optimization of parameters for non integer order transfer function models with time delay (2) and (3), performed using the Cuckoo Search algorithm, yields more accurate results in terms of the chosen objective function compared to the classical Nelder-Mead method. This confirms the validity of applying swarm-based algorithms, as they enhance the accuracy of the optimization process and allow for more precise determination of heat flow model parameters, particularly in the case of non integer order models.